Soluzioni dell'esonero del 1/12/04

Primo Esercizio compito A.

• $f(z) = \dfrac{2-2i}{z^2-2z(1+i)+4i}$. Le radici del denominatore sono $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$ e quindi otteniamo $f(z) = \dfrac{2-2i}{(z-z_o+z_o-2)(z-z_o+z_o-2i)} = \dfrac{2-2i}{(z_o-2)(1+\frac{z-z_o}{z_o-2})(z_o-2i)(1+\frac{z-z_o}{z_o-2i})}$ da cui si ottiene $f(z) = \dfrac{2(1-i)}{(z_o-2)(z_o-2i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z-z_o}{z_o-2}\right)^k\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\dfrac{z-z_o}{z_o-2i}\right)^q$ e quindi $f(z) = \dfrac{2(1-i)}{(z_o-2)(z_o-2i)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-)^n}{(z_o-2)^k(z_o-2i)^{n-k}}$ e l'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}\colon |z-z_o|<r\}$ dove $r=\min\{|z_o-2|,|z_o-2i|\}$.

Se si scrive la serie come $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-z_o)^k$ si ha $c_k = \dfrac{2(1-i)}{(z_o-2)(z_o-2i)}(-)^n\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(z_o-2)^k(z_o-2i)^{n-k}}$.

• Se $z_o = 1+i$ si ottiene $c_3 = \dfrac{2(-1+i)}{(-1+i)(1-i)}\sum_{k=0}^{3}\dfrac{1}{(i-1)^k(1-i)^{3-k}} = \dfrac{i-1}{i}\dfrac{1}{(i-1)^3}\sum_{k=0}^{3}(-)^k = 0$

• Se $z_o = 0$ si ha $b_3 = \dfrac{2-2i}{-4i}\sum_{k=0}^{3}\dfrac{1}{(-2)^k}\dfrac{1}{(-2i)^{3-k}} = \dfrac{i-1}{2i}\dfrac{1}{(-2i)^3}\sum_{k=0}^{3}i^k = 0$

• Lo sviluppo di Laurent centrato in $z_o = 2$ è : $f(z) = \dfrac{2-2i}{z-2}\dfrac{1}{z-2+2-2i} = \dfrac{1}{z-2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z-2}{2-2i}\right)^k = \sum_{k=-1}^{+\infty}(-)^{k+1}\dfrac{(z-2)^k}{(2-2i)^{k+1}}$ da cui $a_4 = \dfrac{(-)^5}{2^5(1-i)^5} = \dfrac{1+i}{2^8}$ usando il fatto che $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. L'insieme di convergenza è l'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}\colon 0<|z-2|<|2-2i|\}$

• La serie di Laurent centrata nell'altro punto è $f(z) = \dfrac{-1}{z-2i}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z-2i}{2i-2}\right)^k$ e quindi a_4 è uguale al precedente.

L'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}\colon 0<|z-2i|<|2-2i|\}$ (notare che $z=z_o$ è escluso).

Secondo Esercizio compito A.

$f(z) = iz\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{i^k}{k!z^k} + \dfrac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-)^k}{(2k)!}z^{2k}$ da cui $Resf(0) = i\dfrac{i^2}{2}+1 = 1-\dfrac{i}{2}$

Terzo Esercizio tutti i compiti.

• Con la sostituzione $x-3=t$ l'integrale diventa $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(4t^2+a^2)^2}$ con $a=\sqrt{3}$. Chiudendo il piano complesso dalla parte superiore e supponendo $a>0$ si ha $I = 2\pi i\displaystyle\lim_{z\to\frac{ia}{2}}\frac{d}{dz}\frac{(z-\frac{ia}{2})^2}{(2z+ia)^2(2z-ia)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$

• $\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\frac{\ln\frac{x}{a}}{(x^2+a^2)^2}\overset{\text{def}}{=}I$. Scriviamo l'integrale come $\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2}-\int_0^{+\infty}dx\frac{\ln(a)}{(x^2+a^2)^2}\overset{\text{def}}{=}I_1-I_2$. Il secondo integrale è uguale al precedente a patto di qualche sostituzione. Ponendo infatti $2t=u$ nel precedente integrale otteniamo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(4t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(u^2+a^2)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{(u^2+a^2)^2}$ e quindi $I_2 = (\ln a)\frac{\pi}{4a^3}$

Usando il cammino nel piano complesso definito a lezione, il primo integrale è pari a $I_1 = \dfrac{1}{2}2\pi i\sum_k Resf(z_k) - \dfrac{i\pi}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$. La funzione è $f(z) = \dfrac{\ln z}{(z^2+a^2)^2}$ e il residuo va calcolato nel punto $z=ia$. Dunque si ottiene $I_1 = 2\pi i\dfrac{1}{2}\displaystyle\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{(z-ia)^2\ln z}{(z^2+a^2)^2} - i\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{4a^3} = (\frac{1}{ia}\frac{1}{(2ia)^2}-\frac{2\ln(ia)}{(2ia)^3})\pi i - i\frac{\pi^2}{8a^3} = -\frac{2\pi}{4a^3}+\frac{\pi}{2a^2}\ln a$ da cui $\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}(\ln a - 1)$. La somma $I_1 - I_2$ dà $-\dfrac{\pi}{4a^3}$.

Quarto Esercizio tutti i compiti.

• $\begin{cases} y'' + a^2 y = \delta(t-b) \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$ Bisogna risolvere l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} dp \frac{e^{p(t-b)}}{p^2+a^2} = (\frac{e^{(t-b)ia}}{2ia} + \frac{e^{(t-b)(-ia)}}{-2ia})H(t-b) = \frac{1}{a}\sin(a(t-b))H(t-b)$

• $\begin{cases} y'' + a^2 y = \delta(t-b) \\ y(0) = y_0, y'(0) = 0 \end{cases}$ Bisogna risolvere l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} dp e^{pt} \frac{e^{-pb} + y_0 p}{p^2+a^2} \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2$

I_1 è come prima. $I_2 = (\frac{iae^{ita}y_0}{2ia} + \frac{-ita}{-2ia}y_0(-ia))H(t) = y_0\cos(ta)H(t)$ per cui la soluzione è $y(t) = \frac{1}{a}\sin(a(t-b))H(t-b) + y_0\cos(ta)H(t)$

• $\begin{cases} y'' + a^2 y = \delta(t-b) \\ y(0) = 0, y'(0) = y_0 \end{cases}$ Bisogna risolvere l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} dp e^{pt} \frac{e^{-pb} + y_0}{p^2+a^2} \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2$

I_1 è come prima. $I_2 = y_0(\frac{e^{ita}y_0}{2ia} + \frac{e^{-tia}}{-2ia})H(t) = \frac{y_0}{a}\sin(ta)H(t)$ per cui la soluzione è $y(t) = \frac{1}{a}\sin(a(t-b))H(t-b) + \frac{y_0}{a}\sin(ta)H(t)$

Primo Esercizio compito B.

• $f(z) = \frac{2+2i}{z^2+2z(1-i)-4i}$. Le radici del denominatore sono $z_1 = -2$, $z_2 = 2i$ e quindi otteniamo $f(z) = \frac{2+2i}{(z-z_o+z_o+2)(z-z_o+z_o-2i)} = \frac{2+2i}{(z_o+2)(1+\frac{z-z_o}{2-z_o})(z_o-2i)(1+\frac{z-z_o}{z_o-2i})}$ da cui si ottiene $f(z) = \frac{2(2+i)}{(z_o+2)(z_o-2i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-z_o}{-z_o+2}\right)^k\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\frac{z-z_o}{z_o-2i}\right)^q$ e quindi $f(z) = \frac{2(1+i)}{(z_o+2)(z_o-2i)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^n}{(z_o+2)^k(z_o-2i)^{n-k}}$ e l'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}: |z-z_o| < r\}$ dove $r = \min\{|z_o+2|, |z_o-2i|\}$.

Se si scrive la serie come $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-z_o)^k$ si ha $c_k = \frac{2(1+i)}{(z_o+2)(z_o-2i)}(-)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(z_o+2)^k(z_o-2i)^{n-k}}$.

• Se $z_o = -1+i$ si ottiene $c_3 = \frac{2(i+1)}{(1+i)(-1-i)}(-)^3\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{(1+i)^k(-1-i)^{3-k}} = \frac{2(1+i)}{2i}\frac{1}{(1+i)^3}\sum_{k=0}^{3}(-)^{-3+k} = 0$

• Se $z_o = 0$ si ha $b_3 = \frac{2-2i}{-4i}\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{2^k}\frac{1}{(-2i)^{3-k}} = \frac{i-1}{2i}\frac{1}{(-2i)^3}\sum_{k=0}^{3}(-i)^k = 0$

• Lo sviluppo di Laurent centrato in $z_o = -2$ è : $f(z) = \frac{2+2i}{z+2}\frac{1}{z+2-2-2i} = -\frac{1}{z+2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z+2}{2+2i}\right)^k = \sum_{k=-1}^{+\infty}(-)^{k+1}\frac{(z+2)^k}{(2-2i)^{k+1}}$ da cui $a_4 = \frac{-1}{2^5(1+i)^5} = \frac{1-i}{2^8}$ usando il fatto che $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. L'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}: 0 < |z+2| < |2-2i|\}$ (notare che $z = z_o$ è escluso).

• La serie di Laurent centrata nell'altro punto è $f(z) = \frac{1}{z-2i}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\frac{z-2i}{2i+2}\right)^k$ e quindi a_4 è uguale al precedente.

L'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}: 0 < |z-2i| < |2-2i|\}$ (notare che $z = z_o$ è escluso).

Secondo Esercizio compito B.

$f(z) = iz^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i^k}{k!z^k} + \frac{1}{6}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$ per cui $Res f(0) = \frac{1}{3}$

Primo Esercizio compito C.

• $f(z) = \dfrac{-2-2i}{z^2+2z(1+i)-4i}$. Le radici del denominatore sono $z_1 = 2$, $z_2 = -2i$ e quindi otteniamo $f(z) = \dfrac{-2-2i}{(z-z_o+z_o-2)(z-z_o+z_o+2i)} = \dfrac{-2-2i}{(z_o-2)(1+\frac{z-z_o}{z_o-2})(z_o+2i)(1+\frac{z-z_o}{z_o+2i})}$ da cui si ottiene $f(z) = \dfrac{-2(1+i)}{(z_o-2)(z_o+2i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z-z_o}{z_o-2}\right)^k\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\left(\dfrac{z-z_o}{z_o+2i}\right)^q$ e quindi $f(z) = \dfrac{-2(1+i)}{(z_o-2)(z_o+2i)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-)^n}{(z_o-2)^k(z_o+2i)^{n-k}}$ e l'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}\colon |z-z_o|<r\}$ dove $r = \min\{|z_o-2|, |z_o+2i|\}$.

Se si scrive la serie come $\sum_{n=0}^{+\infty}c_k(z-z_o)^n$ si ha $c_n = \dfrac{-2(1+i)}{(z_o-2)(z_o+2i)}(-)^n\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(z_o-2)^k(z_o+2i)^{n-k}}$.

• Se $z_o = 1-i$ si ottiene $c_3 = \dfrac{-2(1+i)}{-4i}\sum_{k=0}^{3}\dfrac{1}{(-i-1)^k(1+i)^{3-k}} = \dfrac{(1+i)}{2i(1+i)^3}\sum_{k=0}^{3}(-)^k = 0$

• Se $z_o = 0$ si ha $b_3 = \dfrac{1+i}{2i}\sum_{k=0}^{3}\dfrac{1}{(-2)^k}\dfrac{1}{(2i)^{3-k}} = \dfrac{1+i}{2i}\dfrac{1}{(-2i)^3}\sum_{k=0}^{3}i^k = 0$

• Lo sviluppo di Laurent centrato in $z_o = 2$ è : $f(z) = \dfrac{-2-2i}{z-2}\dfrac{1}{z-2+2+2i} = -\dfrac{1}{z-2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z-2}{2+2i}\right)^k = \sum_{k=-1}^{+\infty}(-)^{k+1}\dfrac{(z-2)^k}{(2+2i)^{k+1}}$ da cui $a_4 = \dfrac{-(-)^5}{2^5(1+i)^5} = \dfrac{-1+i}{2^8}$ usando il fatto che $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. L'insieme di convergenza è l'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}\colon 0<|z-2|<|2+2i|\}$ (notare che $z = z_o$ è escluso).

• La serie di Laurent centrata nell'altro punto è $f(z) = \dfrac{1}{z+2i}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z+2i}{-2i-2}\right)^k = \dfrac{1}{z+2i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z+2i}{+2i+2}\right)^k$ e quindi a_4 è uguale al precedente.

L'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbf{C}\colon 0<|z-2i|<|2-2i|\}$ (notare che $z = z_o$ è escluso).

Secondo Esercizio compito C.

$f(z) = 2ze^{\frac{i}{z}} + \dfrac{\sin z}{z^2(z-1)} = 2z\sum_{k=0}^{+\infty}(\dfrac{i}{z})^k\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)\sum_{q=0}^{+\infty}z^q$ e il residuo è $Resf(0) = \dfrac{2}{2}i^2 - 1 = -2$

Primo Esercizio compito D.

• $f(z) = \dfrac{2-2i}{(z+2)(z+2i)} = \dfrac{2-2i}{(z-z_o+z_o+2)(z-z_o+z_o+2i)} = \dfrac{2-2i}{(z_o+2)(z_o+2i)}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z_-z_o}{z_o+2}\right)^k\cdot$

$\cdot\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z_-z_o}{z_o+2i}\right)^q = \dfrac{2-2i}{(z_o+2)(z_o+2i)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(z_o+2)^k(z_o+2i)^{n-k}}$

Nella richiesta di calcolare c_3 per $z_o = -i-i$ vi è un chiaro errore. $-2i$ è un punto di singolarità della funzione e quindi non si puó calcolare nessun coefficiente. Infatti l'intenzione era di scrivere $z_o = -1-i$ e per errore ho scritto $-i-i$. Alla domanda dunque non si poteva rispondere.

$$b_3 = \frac{2-2i}{4i}\frac{1}{2^3}(-)^3\sum_{k=0}^{3}i^{k-3} = 0$$

• Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = -2$ è $f(z) = -\dfrac{1}{z+2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z+2}{2i-2}\right)^k = -\sum_{k=-1}^{+\infty}(-)^{k+1}\dfrac{(z+2)^k}{(2i-2)^{k+1}}$

e $a_4 = -\dfrac{(-)^5}{2^5(i-1)^5} = \dfrac{1+i}{2^8}$

• Lo sviluppo di Laurent centrato in $z = -2i$ è $f(z) = \dfrac{1}{z+2i}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\left(\dfrac{z+2i}{2-2i}\right)^k = \sum_{k=-1}^{+\infty}(-)^{k+1}\dfrac{(z+2i)^k}{(2-2i)^{k+1}}$

e $a_4 = -\dfrac{1}{2^5(1-i)^5} = \dfrac{1+i}{2^8}$

Secondo Esercizio compito D.

$f(z) = 2ze^{-\frac{1}{z}} - i\dfrac{\sin(iz)}{z^2} = 2z\sum_{k=0}^{+\infty}(\dfrac{-1}{z})^k\dfrac{1}{k!} - \dfrac{i}{z^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-)^k(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ e $Res f(0) = 1-i$